

1) Studiare la convergenza semplice, uniforme e totale della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-(x-2n)^2}}{x^2+1}$$

Sol: Sia $f_n := \sum_{j=0}^n \frac{e^{-(x-2j)^2}}{x^2+1}$;

la richiesta ~~il testo~~ equivale a ricercare (su $\mathbb{R} \dots$) la convergenza puntuale (semplice) o uniforme della successione di funzioni (f_n) definite ciascuna dalle somme parziali:

$$f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n := \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=0}^n \frac{e^{-(x-2j)^2}}{x^2+1} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{e^{-(x-2j)^2}}{x^2+1}$$

• Vediamo x e dove $f_n \left(\sum_{j=0}^n \frac{e^{-(x-2j)^2}}{x^2+1} \right)$ converge puntualmente. Sia $x \in \mathbb{R}$ fissato.

la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-(x-2n)^2}}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(x-2n)^2}$ è

convergente (ricordiamo, stiamo studiando la convergenza puntuale quindi per ogni x fissato: x è un parametro o, un "numero").

il termine n -esimo è $e^{-(x-2n)^2}$; Ad esempio,

siccome $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-(x-2n)^2}}{1/n^2} = 0$, e $\sum \frac{1}{n^2}$ è convergente,

si ha che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-(x-2n)^2}}{1+x^2}$ è convergente.

Quindi per ogni $x \in \mathbb{R}$, la successione $f_n(x) = \sum_{j=1}^n \frac{e^{-(x-2j)^2}}{1+x^2}$

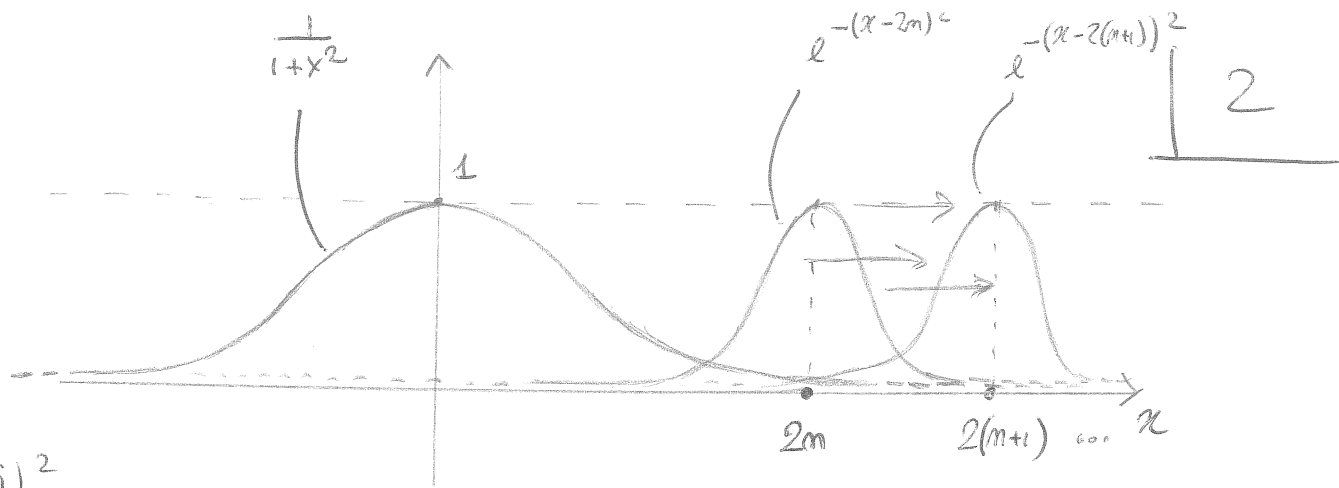
converge al $f(x) := \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{e^{-(x-2j)^2}}{1+x^2}$, che per ogni $x \in \mathbb{R}$ è ben definita.

(Quindi per ogni x , la $f(x)$ definita dalle somme infinite $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{e^{-(x-2j)^2}}{1+x^2}$ è ben definita).

f_n converge al f uniformemente? Poiché questa successione è data dalle somme parziali di una serie, si può tentare inizialmente cercando di provare la convergenza totale della serie delle sup-norme (che implica $f_j \rightarrow f$ uniformemente). (Bisogna vedere su quali sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ questo avviene!), cioè

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ (o \ x \in I \subseteq \mathbb{R})}} \left| \frac{e^{-(x-2j)^2}}{1+x^2} \right| < +\infty.$$

Come si comporta $\frac{e^{-(x-2j)^2}}{1+x^2}$?



$\frac{e^{-(x-2j)^2}}{1+x^2}$ è il prodotto tra $\frac{1}{1+x^2}$ ed $e^{-(x-2j)^2}$, che è una

gaussiana che al crescere di j sta traslando (ha il massimo in $x = 2j$). Cosa sta facendo il sup di questa funzione? Dal disegno sembra proprio che tutta la funzione stia andando verso 0 (uniformemente, quindi anche il sup!) perché le due "componenti" si stanno allontanando, e siccome sono moltiplicate tra di loro aumenta che in 1 il prodotto sarà molto piccolo, così come in $x=2j$, via via che j cresce. Questa è una descrizione "a parole".

• Formalmente: Sia n grande (a noi serve che la serie delle sup norme converga, possiamo anche partire da un certo n_0 in poi: il $\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{e^{-(x-2n)^2}}{1+x^2} \right|$ per $n \leq n_0$ è finito, quindi $\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{e^{-(x-2n)^2}}{1+x^2} \right| = \sum_{n=0}^{n_0} \sup_{x \in \mathbb{R}} | \cdot | + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} | \cdot |$

La prima somma è finita, dobbiamo vedere solo la convergenza della seconda: (quando si studia le somme di una serie, possiamo sempre partire da un n_0 fissato). Ad ogni modo, sia $n \geq 3$ (p. esempio)

Consideriamo, per ogni $m \geq 3$, le regioni di $\mathbb{R}$
 $\{m \leq x \leq 3m\}$ e $\{x \leq m\} \cup \{x \geq 3m\}$, e

le funzioni

$$\frac{e^{-(x-2m)^2}}{x^2+1}; \text{ chiaramente, } \forall x \in \mathbb{R}$$

per

si ha $e^{-(x-2m)^2} \leq 1$, $\frac{1}{1+x^2} \leq 1$ (questo è chiaro $\forall x \in \mathbb{R}$).

Poi:

i) $m \leq x \leq 3m$, si ha che $\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{1}{m^2+1}$ (e $e^{-(x-2m)^2} \leq 1$),

per cui
$$\frac{e^{-(x-2m)^2}}{x^2+1} \leq \frac{1}{m^2+1}$$

ii) $\{x \leq m\} \cup \{x \geq 3m\}$, si ha $e^{-(x-2m)^2} \leq e^{-m^2}$ (e $\frac{1}{1+x^2} \leq 1$),

per cui
$$\frac{e^{-(x-2m)^2}}{x^2+1} \leq e^{-m^2}$$

In definitiva, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\frac{e^{-(x-2m)^2}}{x^2+1} \leq \max \left\{ e^{-m^2}, \frac{1}{m^2+1} \right\}$;

ricordando $\frac{1}{m^2+1} \geq e^{-m^2} \forall m \geq 1 \Rightarrow \max \left\{ e^{-m^2}, \frac{1}{m^2+1} \right\} = \frac{1}{m^2+1}$.

Quindi

$$\boxed{\frac{e^{-(x-2m)^2}}{x^2+1} \leq \frac{1}{m^2+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

Portanto $\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{e^{-(x-2n)^2}}{1+x^2} \leq \frac{1}{n^2+1}$

3

(se la funzione $\forall x$ è più piccola di $\frac{1}{n^2+1} \Rightarrow$ anche il suo sup).

Nb. Cercare effettivamente quanto vale il sup è quasi infaticabile e mono: trovare la derivata di $\frac{e^{-(x-2n)^2}}{1+x^2}$

e porla $= 0$ conduce a espressioni lunghe.

il sup si vede che è molto più piccolo di $\frac{1}{n^2+1}$, ma e noi questa stima basta).

Si come $\left\| \frac{e^{-(x-2n)^2}}{1+x^2} \right\|_{\infty} \leq \frac{1}{n^2+1}$, per il criterio

del confronto si ha convergenza totale delle serie delle sup-norme $\sum_{n=0}^{+\infty} \left\| \frac{e^{-(x-2n)^2}}{1+x^2} \right\|_{\infty}$ su tutto $\mathbb{R}$.

Per cui si ha anche convergenza uniforme della successione $f_n = \sum_{j=0}^n \frac{e^{-(x-2j)^2}}{1+x^2}$ a $f = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{e^{-(x-2j)^2}}{1+x^2}$.

□

2) Studiare gli insiemi di convergenza semplice, uniforme e totale di

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x|+2^n}{|x|^3+3^n}.$$

Sl. Come al solito (soltanto dei dettagli che sono uguali all'es. 1)), dobbiamo studiare la c. della successione

$$(f_n)_n, \quad f_n(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{|x|+2^j}{|x|^3+3^j}.$$

Per quali $x \in \mathbb{R}$ converge puntualmente? Se $x \in \mathbb{R}$ fisso.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{|x|+2^j}{|x|^3+3^j}; \text{ questa serie è a termini positivi.}$$

(non ci sono x "particolari" per cui il termine della serie presenti comportamenti "diversi").

$$\frac{|x|+2^j}{|x|^3+3^j} = \left(\frac{2}{3}\right)^j \left(\frac{|x|2^{-j}+1}{|x|^3 3^{-j}+1} \right). \text{ Per il criterio}$$

della radice

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^j \sqrt[j]{\frac{|x|2^{-j}+1}{|x|^3 3^{-j}+1}} = \frac{2}{3} < 1.$$

$\downarrow$ $\frac{2}{3}$ $\downarrow$ 1

Quindi per ogni $x \in \mathbb{R}$, il limite puntuale

$$f(x) := \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{|x|+2^j}{|x|^3+3^j} \text{ è ben definito.}$$

$f_n(x) \rightarrow f(x)$ (così definite) puntualmente $\forall x \in \mathbb{R}$.

C'è convergenza uniforme della successione f_n ?

Secondo la successione σ delle somme parziali di una serie, tentiamo di provare la

convergenza totale della sup-norma:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{|x| + 2^j}{|x|^3 + 3^j} \right| = \sum_{j=0}^{+\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|x| + 2^j}{|x|^3 + 3^j}$$

(come nell'es. 1, cerchiamo di stimare il $\sup_{x \in \mathbb{R}}$ con una quantità che : a) non dipende da x ma solo da j e b) tale che questa quantità che dipende da j renda la serie $\sum_{j=0}^{+\infty}$ convergente! È questo lo scopo di questo paragrafo.

A volte si riesce con la derivata delle funzioni che appare in ~~la~~ nella sommatoria, in x , e trovando esplicitamente il sup, che ~~non~~ dipenderà solo da j ! Ma in molti casi non si riesce - come in ~~il~~ ^{il} ~~precedente~~ ^{precedente}; però altre stime più roste, ma che comunque ci risolvono il problema, sono possibili).

Forse la derivata di $\frac{|x| + 2^j}{|x|^3 + 3^j}$ è ~~parte~~ $= 0$ e "infettibile". Cerchiamo una stima indipendente da x .

~~arrampicare~~: Consideriamo $x > 0$ (la funzione è positiva e simmetrica, per cui basta studiare solo la parte della $x > 0$)

~~Completando il quadrato si trova che $x > 1/3$ e $x < 1$~~

$$\frac{x+2^j}{x^3+3^j} = \frac{x}{x^3+3^j} + \frac{2^j}{x^3+3^j} \leq \frac{x}{x^3+3^j} + \frac{2^j}{3^j}$$

! stima
correl
($x^3+3^j \geq 3^j$)

la funzione $\frac{x}{x^3+3^j} + \frac{2^j}{3^j}$ vale $\frac{2^j}{3^j}$ in 0,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^3+3^j} + \frac{2^j}{3^j} = \frac{2^j}{3^j}$$

la sua derivata (è facile da trovare) è $\frac{3^j - 2x^3}{(3^j + x^3)^2}$ e si annulla in $x = \frac{3^{j/3}}{2^{1/3}}$ (stima per $x > 0$).

$$\left. \frac{x}{x^3+3^j} + \frac{2^j}{3^j} \right|_{x = \frac{3^{j/3}}{2^{1/3}}} = \left(\frac{2}{3}\right)^j + \frac{2^{2/3}}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}j} \quad (\text{e si vede})$$

che è un max (la derivata in 0 è positiva, quindi parte crescendo e ha solo un punto critico, poi torna, ~~meno~~ ^{per $x \rightarrow +\infty$})
 el valore che aveva in 0 , quindi è un massimo.

Per cui $\frac{x+2^j}{x^3+3^j} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^j + \frac{2^{2/3}}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}j}$; ~~ma~~ ~~da~~

~~ma~~ allora, $\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|x|+2^j}{|x|^3+3^j} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^j + \frac{2^{2/3}}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}j}$ e questo

è il termine di una serie convergente:

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^j + \frac{2^{2/3}}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}j} = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^j + \frac{2^{2/3}}{3} \sum_{j=0}^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^j,$$

e $\frac{2}{3}$ e $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}} < 1$. Per cui

si ha convergenza totale della serie delle sup-norme $\Rightarrow$ 5
convergenza uniforme delle f_n alla f trovata prima
e definita come $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{|x|+2^j}{(x^3+3)^j}$.

□